Σάκης Χιονίδης

Περί μαγικών τετραγώνων

…και παραλλαγών τους.

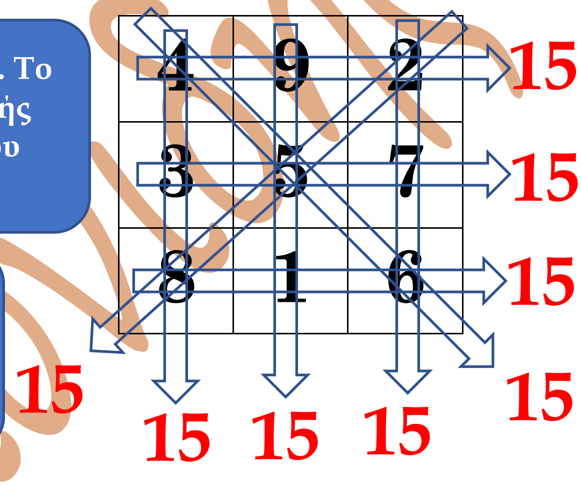
Μια ιστορική αναδρομή

…με τις παραλλαγές, αλλά και τρόπους κατασκευής τους.

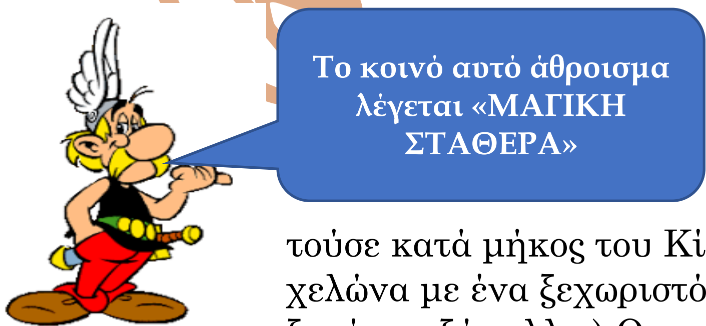
Για μαθητές Γυμνασίου-Λυκείου

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

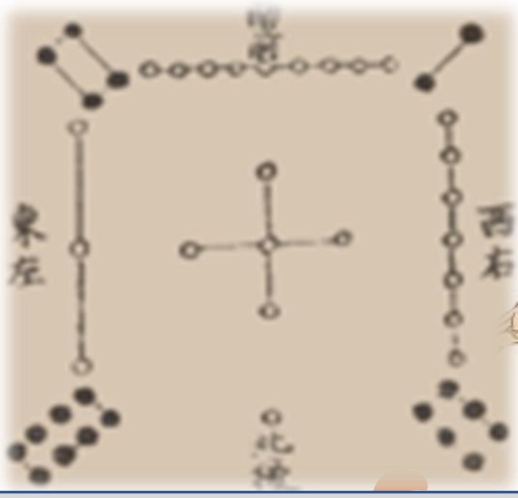
Το παρακάτω τετράγωνο 3 × 3 εμφανίζεται σε λογοτεχνικά κείμενα τουλάχιστον του 650 π.Χ , αλλά η πηγή τους χάνεται στην βαθιά αρχαιότητα.



Όταν λέμε **«Μαγικό τετράγωνο»** , εννοούμε ένα τετράγωνο που έχει χωριστεί σε μικρότερα τετραγωνάκια και σε αυτά έχουμε γράψει αριθμούς , **που δεν επαναλαμβάνονται,** κατά τέτοιο τρόπο ώστε αν τους προσθέσουμε οριζόντια, κατακόρυφα και διαγώνια θα μας δώσουν το ίδιο άθροισμα. Στο παραπάνω μαγικό τετράγωνο είναι:
$4+9+2=15$, $3+5+7=15$, $8+1+6=15$, $4+3+8=15$, $9+5+1=15$
2+7+6=15 , 4+5+6=15 και 2+5+8=15.



Τα μαγικά τετράγωνα έχουν μια πλούσια ιστορία: Ένας κινέζικος μύθος ισχυρίζεται πως καθώς ο κινέζος αυτοκράτορας Yu περπατούσε κατά μήκος του Κίτρινου ποταμού, παρατήρησε μια χελώνα με ένα ξεχωριστό διάγραμμα στο καβούκι της (δες ξανά το εξώφυλλο).Ο αυτοκράτορας αποφάσισε να ονομάσει το ασυνήθιστο αυτό αριθμητικό μοτίβο lo shu. Ωστόσο, το πρώτο μαγικό τετράγωνο που έχει καταγραφεί εμφανίστηκε στο βιβλίο του πρώτου αιώνα Da-Dal Liji.



Το διπλανό μαγικό τετράγωνο είναι μια κινέζικη παράσταση του μαγικού τετραγώνου του κελύφους της χελώνας, τον 13ο αιώνα.

Οι αντίθετες δυνάμεις του θηλυκού και αρσενικού στοιχείου

Σύμφωνα με τον μύθο, ο ποταμός Lo είχε πλημμυρίσει και ο αυτοκράτορας Yo πρόσταξε να γίνουν θυσίες, για να εξευμενιστεί ο θεός του ποταμού. Έτσι ο θεός έστειλε μια χελώνα , που είχε στην πλάτη της ζωγραφισμένο ένα μοτίβο αριθμών.

Το ενδιαφέρον των Κινέζων για τα μαγικά τετράγωνα συνδέεται περισσότερο με την μαντεία παρά με τα Μαθηματικά.

Οι κινέζοι έμποροι έκαναν γνωστά τα μαγικά τετράγωνα στην Ινδία.

Καμωμένα τα μαγικά τετράγωνα από ασήμι και κρεμασμένα στο λαιμό μας προφύλασσαν από την πανώλη, αλλά μας βοηθούσαν και στο τοκετό , σε συνταγές και σε αρώματα.

Οι Άραβες μαθηματικοί γνώριζαν τα μαγικά τετράγωνα από τον 9ο αιώνα, αντιμετωπίζοντας τα , όμως , καθαρά μαθηματικά, απαλλαγμένα από μαγικές ιδιότητες. Κάνοντας ένα μεγάλο βήμα μπροστά , ισλαμιστές διατύπωσαν προτάσεις με κανόνες σχηματισμού μαγικών τετραγώνων.
Ο 13ος αιώνας αποτέλεσε μια οπισθοδρόμηση, προσδίδοντας πάλι στοιχεία μαγείας στα τετράγωνα.

Εγώ πάντως ,κατασκευάζω ωραία Μενίρ

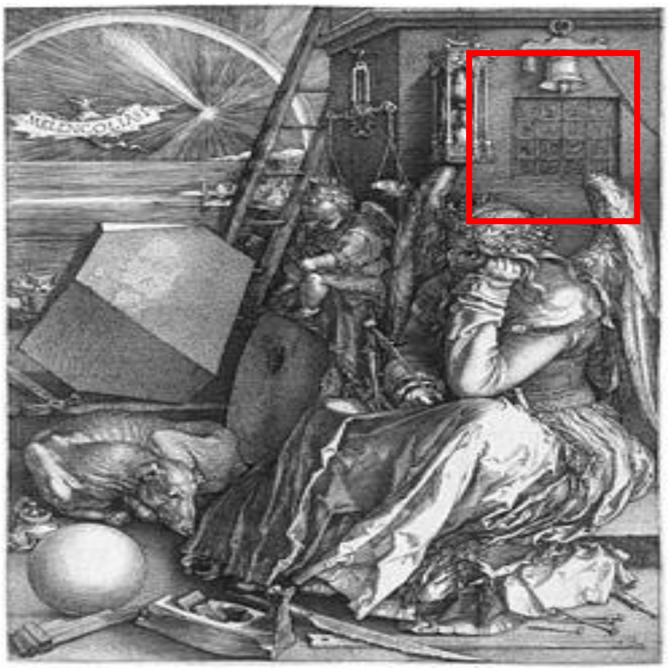
Τα μαγικά τετράγωνα εισάγονται στην Ευρώπη με τον Μανουήλ Μοσχόπουλο το 1300 μ.Χ, ο οποίος μάλιστα Οβελίξ κατασκεύασε πολλά τέτοια, βασισμένος σε αραβικά ή περσικά γραπτά.

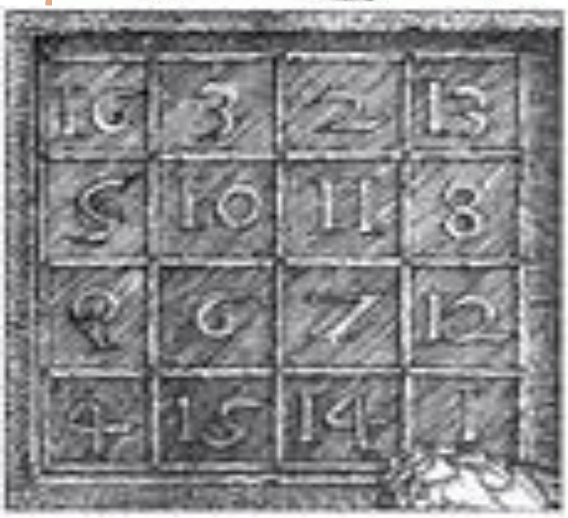
Αυτό είναι του Μοσχόπουλου

25	13	1	19	7
16	9	22	15	3
12	5	18	6	24
8	21	14	2	20
4	17	10	23	11

Και στη τέχνη συναντάμε μαγικά τετράγωνα . Ένα από τα πιο διάσημα του Μεσαίωνα διαστάσεων 4 × 4 το δημιούργησε ο **Άλμπρεχτ Ντύρερ** το 1514 , τοποθετώντας το ως λεπτομέρεια στο χαρακτικό της ***Μελαγχολίας***.

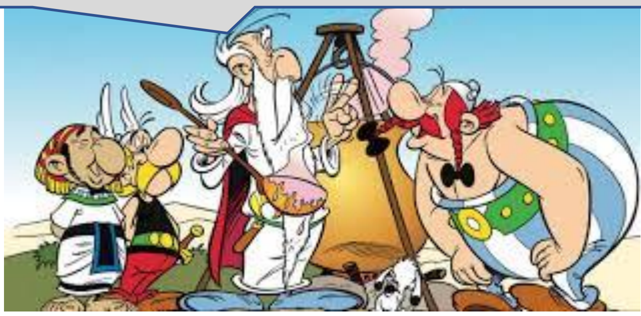
Θέλω να το δω Αστερίξ. Να συζητήσουμε και κάποια πράγματα που παρατηρούμε σε αυτόν τον πίνακα. Από ότι ξέρω του άρεσαν τα μαθηματικά και ασχολήθηκε με αναλογίες.





Η μαγική σταθερά του είναι 34: οι γραμμές ,οι στήλες ,οι διαγώνιες αλλά και τα μικρότερα τετράγωνα 2 × 2 έχουν άθροισμα 34. Επίσης το ίδιο και για τους αριθμούς στις γωνίες του μεγάλου τετραγώνου.

Επίσης, οι αριθμοί στα εξωτερικά κελιά της τελευταίας γραμμής , δηλαδή οι αριθμοί 1 και 4 , αντιστοιχούν στο πρώτο (A) και τέταρτο γράμμα (D) του λατινικού αλφάβητου τα οποία είναι τα αρχικά του ονόματος του **A**lbrecht **D**urer



Τα μαγικά τετράγωνα χωρίζονται Οβελίξ σε διάφορες κατηγορίες.

Αστερίξ ,μη με ζαλίζεις με κατηγορίες και υποκατηγορίες. Ας μιλήσουμε για κάποια ελκυστικά θέματα.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Το παραπάνω είναι κανονικό: εμφανίζονται οι αριθμοί 1,2,3,4,5,6,7 και 8, ενώ έχει μαγική σταθερά 15.

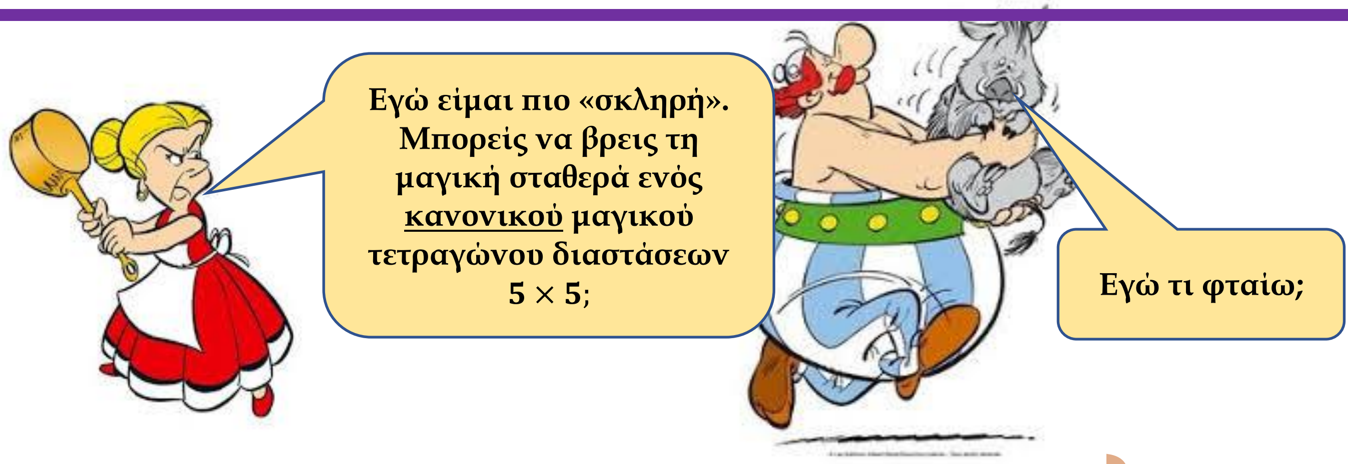
Τα κανονικά μαγικά τετράγωνα παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Είναι εκείνα των οποίων οι αριθμοί είναι διαδοχικοί φυσικοί.

Υπάρχει μαγικό τετράγωνο 2×2 , χωρίς όμως όλοι οι αριθμοί του να είναι ίσοι;

Βάλε κάτι πιο δύσκολο. Ας πούμε ότι υπάρχει τέτοιο μαγικό τετράγωνο και είναι το παρακάτω

α	β
γ	δ

Αν το διπλανό τετράγωνο είναι μαγικό, θα έχουμε:
$\alpha + \beta = \alpha + \delta$,οπότε β=δ . Επίσης:
$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, άρα και α=β , αλλά και
$\alpha + \delta = \beta + \gamma$ και επειδή β=δ θα είναι και α=γ.
Τελικά α=β=γ=δ.



Το κανονικό μαγικό τετράγωνο διαστάσεων 5 × 5 θα περιέχει τους αριθμούς από το 1 έως το 25 από μία φορά τον καθένα.

Βρίσκοντας έτσι το άθροισμα όλων των αριθμών του τετραγώνου και διαιρώντας αυτό το άθροισμα διά 5 θα βρούμε και την μαγική σταθερά.

$$\mathbf{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15}$$
$$\mathbf{+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25}$$

1+25=26 , 2+24=26 , 3+23=26 , 4+22=26 , 5+21=26 κλπ.
Φτιάχνονται έτσι 12 τέτοια ζευγάρια με άθροισμα 26 το καθένα και περισσεύει το 13 , δηλαδή $12 \times 26 + 13 = 312 + 13 = 325$.
Οπότε, η μαγική σταθερά θα είναι $^{325}/_{5} = 65.$

Κάποιες παραλλαγές τους.

Αντί να προσθέτουμε τους αριθμούς στις γραμμές, στις στήλες και στις διαγώνιες να τους **πολλαπλασιάζουμε.**

Πλάκα έχει. Θα τα ΒΑΠΤΙΣΩ πολλαπλασιαστικά μαγικά τετράγωνα.

Το χωριό μας απόχτησε και ΝΟΝΟ.

Η κατασκευή τους είναι εύκολη. Ένας τρόπος είναι να ξεκινήσουμε από ένα γνωστό (αθροιστικό) μαγικό τετράγωνο και να αντικαταστήσουμε οποιονδήποτε αριθμό του ν με τον 2^{ν}, ή με οποιαδήποτε άλλη βάση αντί για το 2.

Θα καταλάβατε βέβαια γιατί. Είναι γνωστή η ιδιότητα των δυνάμεων: $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$. Να δούμε και ένα παράδειγμα

Το πρώτο αρχαίο κινέζικο μαγικό τετράγωνο 3 × 3 που είδαμε , ήταν το

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Θα πάρουμε τώρα ένα πολλαπλασιαστικό μαγικό τετράγωνο που τα στοιχεία του θα είναι δυνάμεις με βάση το 2 και εκθέτες τους αντίστοιχους αριθμούς του διπλανού (αθροιστικού) μαγικού τετράγωνου.

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

Δηλαδή αυτό

16	512	4
8	32	128
256	2	64

το οποίο έχει μαγική σταθερά τον αριθμό $2^{15} = 32768$.

Ένα μικρό προβληματάκι για λύση.

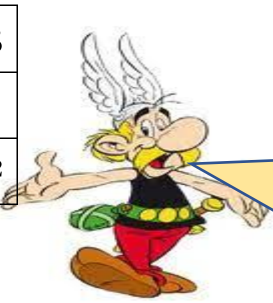
2	9	12
36	6	1
3	4	18

Δες το μαγικό πολλαπλασιαστικό τετράγωνο που βρίσκεται από πάνω σου. Πως το κατασκεύασα;

Αναλύοντας τους αριθμούς του τετραγώνου σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, παίρνουμε:
$2 = 2$, $9 = 3^2$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $1 = 1$, $3 = 3$, $4 = 2^2$, $18 = 2 \cdot 3^2$

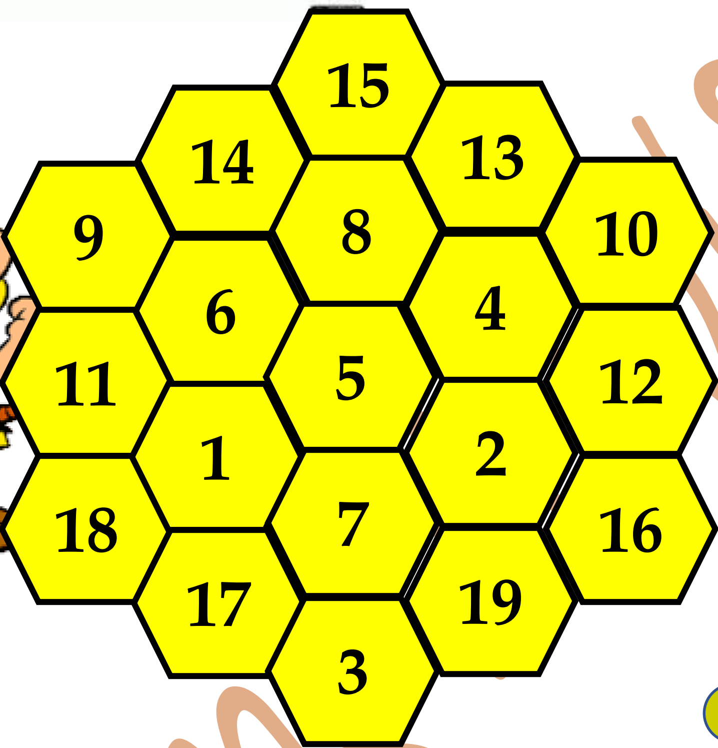
Έτσι , το μαγικό τετράγωνο βλέπουμε ότι έχει την γενικότερη μορφή:

A	B^2	A^2B
A^2B^2	AB	1
B	A^2	AB^2



Στην περίπτωση μας το Α=2 και το Β=3, οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε όσα θέλουμε, αρκεί όπου Α και Β να βάλουμε ότι αριθμούς θέλουμε.

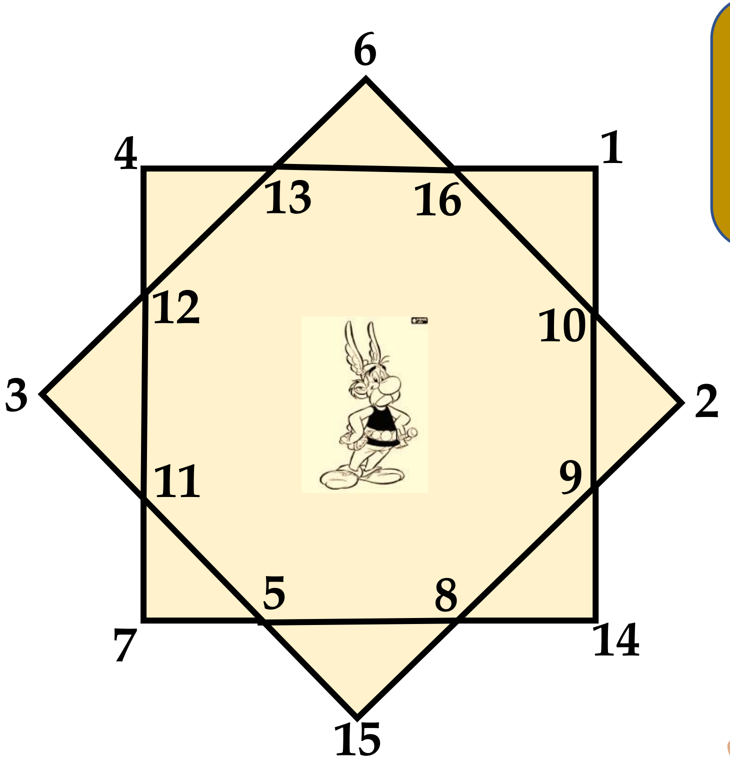
Δες παρακάτω Αστερίξ και άλλα σχήματα. Η επινοητικότητα των ανθρώπων δεν έχει όρια

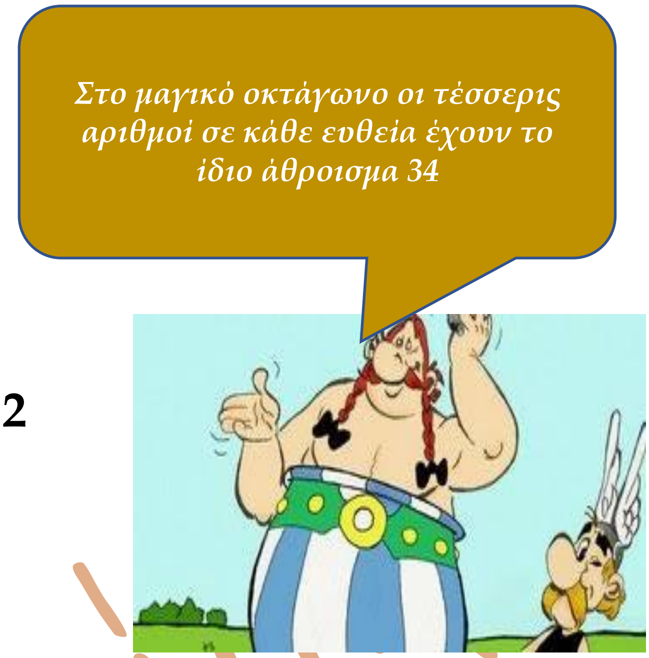


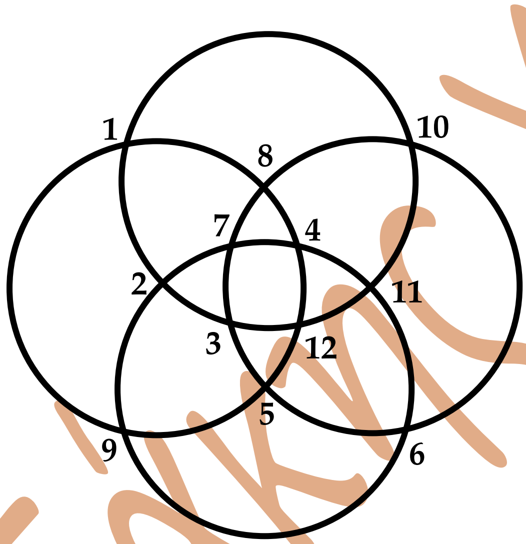
Ένα μαγικό εξάγωνο, όλα τα αθροίσματα κατά μήκος εξαγώνων που βρίσκονται στην ίδια ευθεία από οποιαδήποτε πλευρά του σε οποιαδήποτε άλλη είναι πάντα 38.

Πω, πω Αστερίξ . Καταπληκτικό σχήμα . Και πως ταίριαξαν όλα τα εξάγωνα μεταξύ τους. Θα πλακοστρώσω το σπίτι μου με τέτοια σχηματάκια. Άραγε αυτό γίνεται με όλα τα κανονονικά πολύγωνα;

Να ένα ερώτημα προς διερεύνηση.

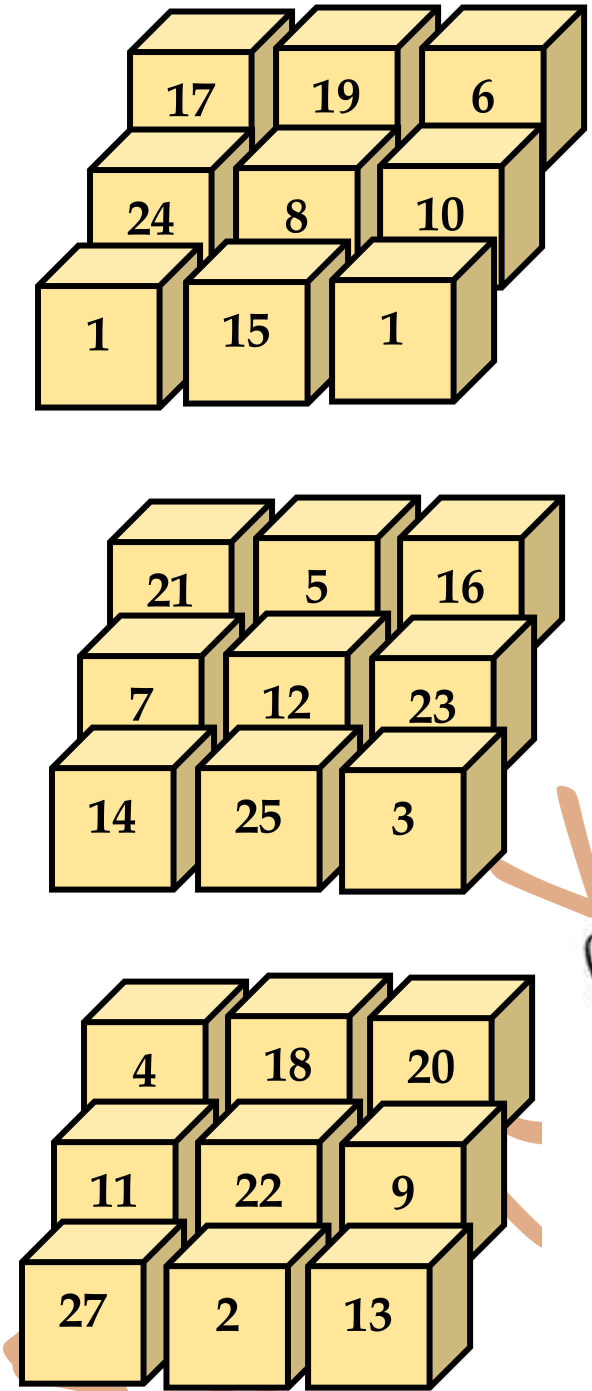




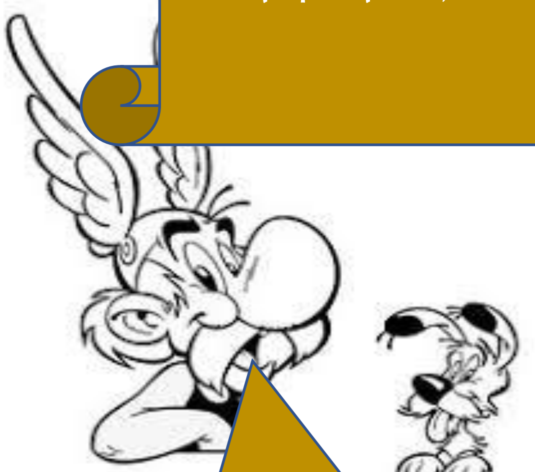


Στον μαγικό κύκλο όλα τα αθροίσματα κατά μήκος κάθε κύκλου είναι 39.

Κατά αναλογία με τα μαγικά τετράγωνα , έχουμε τους μαγικούς κύβους. Στο σχήμα που θα δούμε στην επόμενη σελίδα ,ο μαγικός κύβος αποτελείται από 27 μικρότερα «κυβάκια» ,πάνω στα οποία είναι γραμμένος ένας αριθμός.

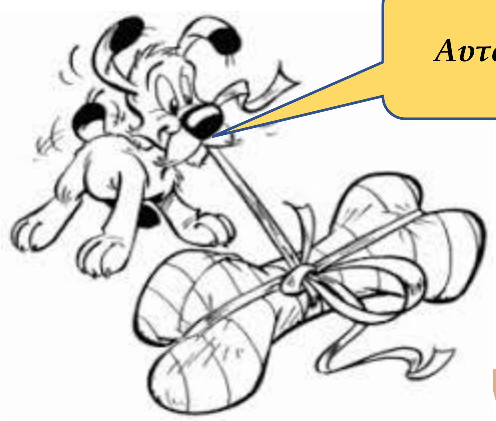


Στην εικόνα βλέπουμε έναν μαγικό κύβο. Για να είναι ορατοί οι αριθμοί , το έχουμε ζωγραφίσει πιο αραιό ,κανονικά τα «κυβάκια» είναι ενωμένα μεταξύ τους. Περιέχει αυτός τους αριθμούς από το 1 έως το 27 από μία φορά , κάθε μία από τις 27 «φέτες» του είναι μαγικό τετράγωνο (εξαιρούνται οι διαγώνιοι των τετραγώνων αυτών) με μαγικό άθροισμα 42. Τα αθροίσματα κατά μήκος, κατά ύψος και κατά βάθος (αλλά όχι κατ' ανάγκη διαγώνια) είναι ίσα.



Βλέπουμε , Ιντεφίξ παρακάτω ένα πρόβλημα προς λύση. Αν το λύσεις , το κοκαλάκι είναι δικό σου!!

16	**3**	**2**	**13**
5	**10**	**11**	**8**
12	**6**	**7**	**9**
4	**14**	**15**	**1**



Άλλο ένα πρόβλημα: τοποθέτησε όλους τους συνεχόμενους αριθμούς αριθμούς από το 1 μέχρι το 9 , έναν σε κάθε τετράγωνο, ώστε τα κατακόρυφα , οριζόντια και διαγώνια αθροίσματα **να είναι διαφορετικά!!**

Αυτά τα είδη των τετραγώνων που ονομάζονται **ετεροτετράγωνα** προκάλεσαν μια έκρηξη ενδιαφέροντος στη δεκαετία του 1950.
Ο **Royal V. Heath** , ένας Αμερικάνος θαυματοποιός και λάτρης των γρίφων, απέδειξε ότι είναι αδύνατη η δημιουργία ετεροτετράγωνου με διαστάσεις 2 × 2 που να περιέχει τους αριθμούς 1, 2, 3 και 4.

9	8	7
2	1	6
3	4	5

Ο J.A. Lindon , Άγγλος λάτρης των γρίφων, έχει κάνει πολλή πρωτοποριακή δουλειά στην κατασκευή «αντιμαγικών» τετραγώνων. Μολονότι όπως θα δούμε , υπάρχουν πολλοί τρόποι για την κατασκευή μαγικών τετραγώνων, φαίνεται ότι δεν υπάρχει σχεδόν κανένας απλός τρόπος για την κατασκευή αντιμαγικών τετραγώνων . Αντιμαγικά τετράγωνα τάξεων 2 × 2 ,3 × 3 είναι αδύνατον να κατασκευαστούν , ενώ είναι δυνατόν να υπάρχουν μεγαλύτερης τάξης.